

# La formule de Stirling et l'intégrale de Gauss

La factorielle d'un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  est définie par la formule :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$$

avec la convention  $0! = 1$ . L'objectif de ce problème est d'estimer le comportement asymptotique de la factorielle au voisinage de l'infini. On montrera à cet effet la formule de Stirling, qui donne un équivalent de  $n!$  pour  $n$  tendant vers  $+\infty$  :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Ici, le symbole  $\sim$  est défini de la façon suivante : si  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont deux suites de réels, alors on dit qu'elles sont "équivalentes", ce qu'on note  $u_n \sim v_n$ , si et seulement si le quotient  $\frac{u_n}{v_n}$  tend vers 1 pour  $n$  tendant vers  $+\infty$ . Ainsi, la formule de Stirling ci-dessus peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

## 1 Les intégrales de Wallis

### 1.1 Le calcul de l'intégrale de Wallis

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx$$

L'objectif de cette partie est d'évaluer les intégrales  $I_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.** Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est positive et décroissante.

**2.** a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \sin(x)^n dx$$

*Indication : On pourra partir de la définition de  $I_{n+2}$ , écrire  $\sin(x)^{n+2} = \sin(x)^{n+1} \sin(x)$  et primitiver  $\sin(x)$  dans l'intégration par parties.*

b) En écrivant  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ , en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

c) Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$

**3.** Par récurrence sur  $n$  et à l'aide de la relation de récurrence de la question précédente, démontrer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les égalités :

$$I_{2n} = \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

## 1.2 Une estimation asymptotique de $I_n$

4. a) En partant de la formule de récurrence démontrée en question 1, prouver que :

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

(en termes d'équivalents, ceci se ré-écrit :  $I_{n+2} \sim I_n$ )

b) En utilisant la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ , en déduire que :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

5. On considère à présent la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = (n+1)I_{n+1}I_n$

a) En utilisant la relation de récurrence obtenue pour  $(I_n)_{n \geq 0}$ , démontrer que la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$  est constante. Quelle est sa valeur ?

b) En écrivant  $nI_n^2 = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{I_n}{I_{n+1}} \cdot J_n$  et à l'aide des questions précédentes, prouver que :

$$nI_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

c) En déduire un équivalent simple de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ , c'est à dire une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  aussi simple que possible telle que  $I_n \sim u_n$ , c'est à dire telle que  $\frac{I_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

## 2 La formule de Stirling

### 2.1 Le développement de Stirling sans la constante

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right) \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n)$$

6. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n = v_{n+1} - v_n$ .

a) Démontrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'identité suivante :

$$w_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

b) En utilisant le développement limité du logarithme, en déduire que pour  $n \rightarrow +\infty$ , on a :

$$w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

c) En déduire que la série  $\sum w_n$  est convergente, puis que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est convergente.

7. Déduire de ce qui précède l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C$$

C'est à dire :

$$n! \sim C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

## 2.2 La constante $\sqrt{2\pi}$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer qu'en fait, on a  $C = \sqrt{2\pi}$  (où  $C$  est la constante définie précédemment). Pour cela, on va se servir des intégrales de Wallis.

8. a) En utilisant la formule établie à la question 7, montrer que :

$$\frac{\sqrt{n} (2n)!}{4^n (n!)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{C}$$

b) À l'aide de la formule démontrée à la question 3, en déduire que :

$$\sqrt{2n} I_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{C}$$

9. Comparer ce dernier résultat à celui de la question 5b, et en déduire finalement que  $C = \sqrt{2\pi}$ . Conclure.

## 3 L'intégrale de Gauss

L'objectif de cette partie est de calculer la très célèbre intégrale suivante, très utile en probabilités et en statistiques :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

10. Montrer que cette intégrale est bien définie.

11. a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $u \in [-n, n]$ , on a :

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u \leq \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{-n}$$

*Indication : On pourra passer au logarithme et utiliser la concavité de ce dernier.*

b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'encadrement :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

12. a) En posant le changement de variable  $x = \sqrt{n} \cos(t)$ , montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} I_{2n+1}$$

b) Avec le changement de variable  $x = \sqrt{n} \tan(t)$ , démontrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)^{2n-2} dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

13. a) En utilisant les questions précédentes, prouver l'encadrement suivant, valable pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

b) Utiliser habilement le résultat de la 5b pour conclure par encadrement que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

c) Démontrer la formule annoncée au début de cette partie.